Hoofdstuk 3: Algebra van Boole

Bij het ontwerpen van elektronische systemen is het uit economisch standpunt van belang dat er uiteindelijk een praktische realisatie tot stand komt met zo weinig mogelijk IC's.

Dit betekent dat we de algebraïsche vergelijking steeds tot in haar eenvoudigste vorm moeten herleiden. Alleen zo kan een praktische realisatie tot stand komen met een minimum aan IC's.

3.1. Schakelalgebra

De Booleaanse algebra is een schakelalgebra die direct toepasbaar is op digitale systemen. We mogen deze algebra dus niet vergelijken met de gewone algebra. Immers, in de Booleaanse algebra kunnen de gebruikte notaties slecht nul of één zijn. De regels van de gewone algebra mogen dus niet altijd worden toegepast voor het vereenvoudigen van logische vergelijkingen.

De Booleaanse algebra laat ons toe om logische vergelijkingen te vereenvoudigen zonder gebruik te maken van waarheidstabellen.

3.1.1. Wetten

De basiswetten uit de algebra van Boole zijn dezelfde als uit de klassieke algebra, namelijk:

- *commutatieve wetten*
- *associatieve wetten*
- *distributieve wetten*

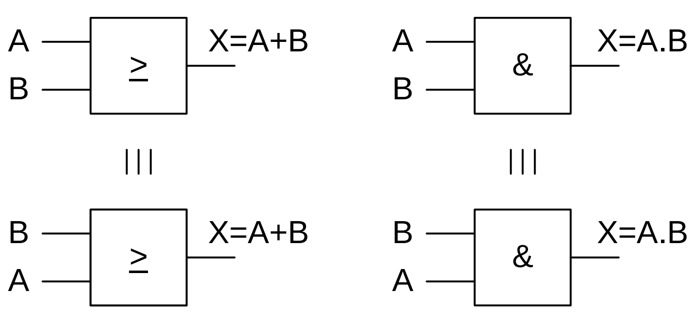
3.1.1.1. De commutatieve wetten

$$\boxed{A + B = B + A} \qquad \boxed{A.B = B.A}$$

In een som van een aantal termen van een logische vergelijking mogen we de termen van plaats verwisselen. De volgorde waarin de termen genoteerd staan is dus onbelangrijk.

In een produkt van een aantal factoren mogen we de factoren van plaats verwisselen. De volgorde waarin de factoren genoteerd staan speelt geen rol bij de uitwerking.

Deze wetten geven ondermeer meer ruimte aan de ontwerper van printplaten (Printed Circuit Board (PCB's)) bij de keuze van de aansluitpinnen van de IC's.

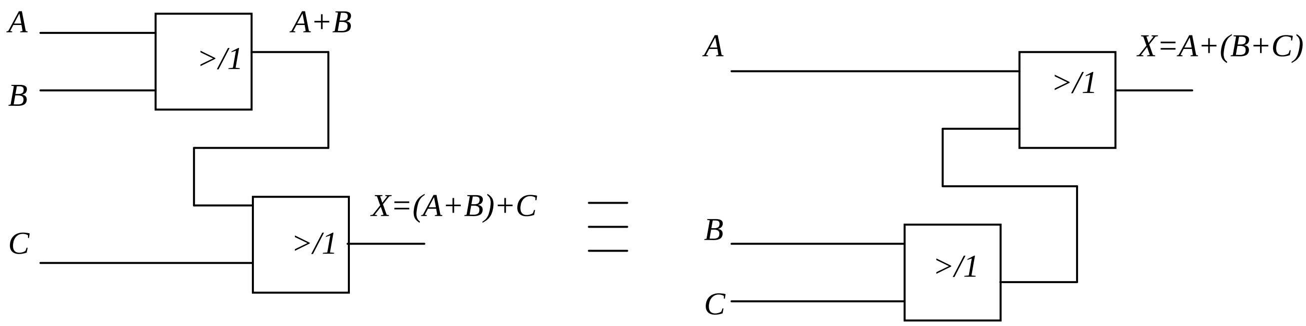


3.1.1.2. De associatieve wetten

$\boxed{(A+B)+C = A+(B+C) = (A+B)+B}$ $\boxed{(A.B).C = A.(B.C) = (A.C).B}$

In een logische som of product mogen enkele termen of factoren steeds gegroepeerd worden.

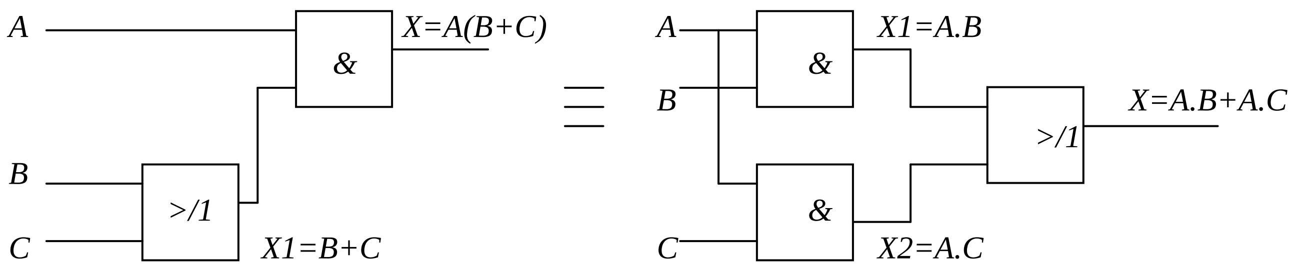
Ook deze manier van werken kan zijn praktisch nut hebben bij het realiseren van gedrukte schakelingen. Dit wordt hieronder geïllustreerd met een paar voorbeelden die ook geldig zijn voor de en – functies.



3.1.1.3. De distributieve wetten

$\boxed{A.(B+C) = A.B + A.C}$ $\boxed{(A+B).(C+D) = A.C + A.D + B.C + B.D}$

Twee booleaanse uitdrukkingen zijn equivalent of gelijk indien ze gelijk zijn voor alle mogelijke toestanden van de ingangsvariabelen in beide uitdrukkingen.
In de praktijk houd dit in dat we één en dezelfde digitale schakeling op meerdere wijzen kunnen realiseren. Dit wordt hieronder voorgesteld.



Bemerk dat men in de praktijk zal opteren voor de rechtse schakeling. Immers, de signaallooptijd voor alle signalen is in de rechterschakeling gelijk. Vandaar dat men praktisch kiest voor de rechtse oplossing. Bemerk eveneens dat beide schakelingen evenveel IC's vragen.

3.1.2. Basisregels

Naast de besproken wetten bestaan er in de algebra van Boole meerdere regels. Ook deze regels hebben tot doel om logische vergelijking te minimaliseren.

Bemerk echter dat er bij het vereenvoudigen niets aan het uiteindelijke logische resultaat van de schakeling mag wijzigen.

Basisregels hebben betrekking tot slechts 1 ingangsvariabele.

3.1.2.1. Een EN functie met 0

$\boxed{A.0 = 0}$ *Voorbeeld:* $A.(B+C).D.0.\overline{E} = 0$

$$X.Y.0.\overline{B}.A.(A.\overline{B}) = 0$$

Als in een logisch produkt één of meer factoren altijd 0 zijn, is het resultaat altijd gelijk aan 0.

3.1.2.2. En functie met 1

$\boxed{A.1 = A}$ *Voorbeeld:* $A.1.(B+C).D = A.(B+C).D$

$$X + Y.1.(A+B) = X + Y.(A+B)$$

Als in een logisch produkt 1 of meer factoren altijd 1 zijn, dan hebben die factoren geen invloed op dat produkt.

3.1.2.3. En functie met zichzelf

$\boxed{A.A = A}$ *Voorbeeld:* $\overline{A.B}.\overline{A.B} = \overline{A.B}$

$$(A+B).(A+B) = A+B$$

Als in een logisch produkt 2 of meer factoren dezelfde zijn, dan volstaat het die factoren 1 keer te noteren.

3.1.2.4. En functie met zijn inverse

$\boxed{A.\overline{A} = 0}$ *Voorbeeld:* $A.B.\overline{A.B} = 0$

$$A.B.\overline{A} = 0$$

$$(A+B).\overline{A+B} = 0$$

Als in een logisch produkt 2 factoren elkaars inverse zijn, dan is het produkt altijd 0

<u>Bemerking:</u>

In het derde voorbeeld moet A+B tussen haakjes staan omdat in de algebra van Boole een En teken voorrang heeft op een of teken.(. heeft voorang op +) De variabelen die voledig overstreept staan hoeft men niet tussen haakjes te plaatsen omdat het inversteken A+B samen houd.

3.1.2.5. Of functie met 0

$\boxed{A+0=A}$ *Voorbeeld:* $A+B.C+\overline{D}+0=A+B.C+\overline{D}$

$A+X+0+\overline{B.C}=A+X+\overline{B.C}$

Als in een logische som 1 of meer termen altijd 0 zijn, dan hebben die termen geen invloed op die som.

3.1.2.6. Of functie met 1

$\boxed{A+1=1}$ *Voorbeeld:* $A+B.C+\overline{D}+1=1$

$\overline{X+Y}+M+1+N=1$

Als in een logische som 1 of meer termen altijd 1 zijn, dan is het resultaat altijd 1.

3.1.2.7. Of functie met zichzelf

$\boxed{A+A=A}$ *Voorbeeld:* $A.B+A.B.A.B$

$\overline{A+B}+\overline{A+B}=\overline{A+B}$

Als in een logische som 2 termen dezelfde uitdrukking hebben, volstaat het die term 1 maal te schrijven.

3.1.2.8. Of functie met zijn inverse

$\boxed{A+\overline{A}=1}$ *Voorbeeld:* $A.B+\overline{A.B}=1$

$A+B+\overline{A+B}=1$

Bemerking: Let op: $A.B+\overline{A}.\overline{B}$ *is niet altijd gelijk aan 1*

Als in een logische som twee termen elkaars inverse zijn, dan is die som altijd 1.

3.1.2.9. Tweemaal inverteren

$\boxed{\overline{\overline{A}}=A}$ *Voorbeeld:* $A+\overline{\overline{B.D}}=A+B.D$

Let op: $\overline{\overline{A}.B}\neq A.\overline{B}$

Een variabele die tweemaal geïnverteerd wordt keert terug tot haar oorspronkelijke toestand.

<u>Bemerking:</u>

Twee boven elkaar liggende inverteringstekens vallen pas weg als beide inverteringstekens dezelfde lengte hebben.
Tweemaal inverteren noemt men soms ook een dubbele negatie of bubbele inversie genoemd.

3.1.3. Uitbreidingsregels

De uitbreidingsregels verschillen van de basisregels omdat ze betrekking hebben op meer dan 1 ingangsvariabele. Ook deze regels stellen ons in staat om ingewikkelde combinatorische vergelijkingen te minimaliseren.

3.1.3.1. De eerste reductieregel

$\boxed{A + A.B = A}$

Deze regel kan als volgt worden aangetoond.

Bewijs: A+A.B = A

We vervangen A door A.1

A.1+A.B
↳*A*
We zonderen A af

A.(1+B)
↳*1*

A.1=A

Besluit:
A+A.B=A
De eerste reductieregel zou als volgt kunnen geformuleerd worden:

Wanneer in een logische vergelijking "voor" en "na" een of - teken dezelfde variabele voorkomt (of zelfde groep van variabelen), waarbij die variabele (of groep van variabelen) langs 1 zijde van het of teken in een en - functie vervat zit, is het eindresultaat gelijk aan die variabele (of groep van variabelen).

Voorbeelden
Voorbeeld 1
A+A.B.C=A

Voorbeeld 2
$A.\overline{B} + A\overline{B}.C = A.\overline{B}$

Voorbeeld 3
A.B+A=A

Voorbeeld 4
A+A.(B+C)=A

3.1.3.2. De tweede reductieregel

$\boxed{A.(A+B)=A}$

Bewijs: $A.(A+B)=A$
We werken de haakjes uit $\underbrace{A.A}_{A}+A.B$

$A+A.B=A$ →*Zie eerste reductieregel*
Besluit: $A(A+B)=A$

De tweede reductieregel zou als volgt kunnen geformuleerd worden:

Wanneer in een logische vergelijking voor en na een en - teken dezelfde variabele voorkomt (of zelfde groep van variabelen) waarbij die variabele (of groep van variabelen) langs 1 zijde van het en - teken in een of - functie vervat zit, is het eindresultaat gelijk aan die variabele (of groep van variabelen).

3.1.3.3. De derde reductieregel

$\boxed{A+\overline{A}.B=A+B}$

Bewijs: $A+\overline{A}+B$

We vervangen A volgens de eerste reductieregel door A=A+A.B

$A+A.B+\overline{A}.B$
↳A
We zonderen B af
$A+B.(A+\overline{A})$
Daarin is $A+\overline{A}=1$
$A+\underbrace{B.1}_{B}$

Besluit: $A+\overline{A}.B=A+B$

De derde reductieregel zou als volgt kunnen geformuleerd worden:

Wanneer in een logische vergelijking “voor of na” een of - teken een variabele voorkomt (of groep van variabelen) en respectievelijk “voor of na" het of – teken het inverse ervan (of de geïnverteerde groep) waarbij die variabele (of de groep van variabelen) langs 1 zijde van het of

- teken in een en - functie vervat zit, dan vervalt die variabele (of de groep van variabelen) samen met het en – teken en blijft het of – teken behouden.

Voorbeelden

$A+\overline{A}.\overline{B} = A+\overline{B}$

$A+\overline{A}.B.C.D = A+B.C.D$

$\overline{B}+B.C = \overline{B}+C$

$A+\overline{A}.(B+C) = A+B+C$

$A.\overline{B}+B = A+B$

3.1.3.4. De vierde reductieregel

$\boxed{(A+\overline{B}).B = A.B}$

Bewijs:

$$\left(A+\overline{B}\right).B = A.B$$
$$\left(A+\overline{B}\right).B$$
Haakjes uitwerken
$$A.B+\underbrace{\overline{B}.B}_{0}$$
$$A.B+0$$
$$A.B$$
$$\Rightarrow \left(A+\overline{B}\right).B = A.B$$

De vierde reductieregel zou als volgt kunnen geformuleerd worden:

Wanneer in een logische vergelijking voor en na een en - teken een variabele voorkomt (of groep van variabelen) en respectievelijk "voor of na" het en – teken het inverse ervan (of de geïnverteerde groep) waarbij die variabele (of de groep van variabelen) langs 1 zijde van het en - teken in een of - functie vervat zit, dan vervalt die variabele (of de groep van variabelen) samen met het of – teken en blijft het en – teken behouden.

3.2. Dualiteitswetten van De Morgan (Theorema's)

3.2.1. Van en naar of

Bij de studie van de nof - poort hebben we geleerd dat de uitgang altijd de geïnverteerde logische som is van de ingangsvariabelen $\left(X = \overline{A+B+C+D+...}\right)$.
Op het eerste zicht zouden we dus met een nof - poort onmogelijk een logisch produkt van variabelen kunnen realiseren.

Met behulp van de Booleaanse algebra en de Theorema's van De Morgan is het nu wel mogelijk om een logisch produkt om te vormen naar een logische som.

Eerste dualiteitswet

$\boxed{\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}}$

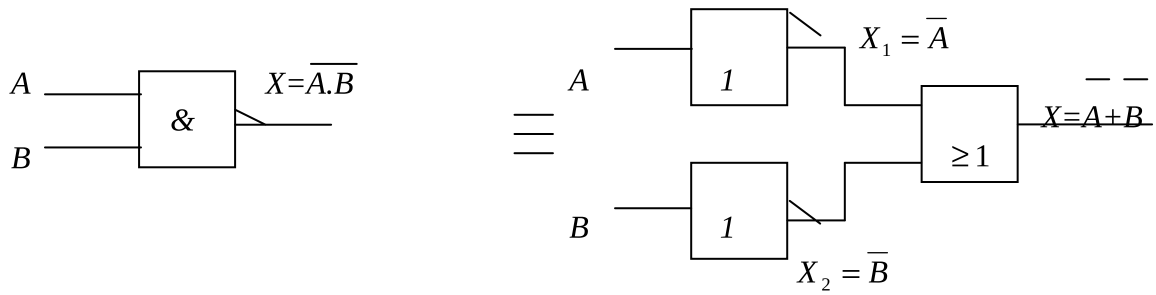
De werkmethode voor het omvormen van logische vergelijkingen volgens de wetten van De Morgan is de volgende:

- *de functietekens van* ***de om te vormen functie*** *wijzigen (+ wordt . en . wordt +)*
- ***de om te vormen functie*** *volledig inverteren*
- *elke variabele of groep van variabelen van* ***de om te vormen functie*** *inverteren*
- *twee boven elkaar liggende inverteringstekens die even lang zijn mogen weg gelaten worden*

Bemerking: Vergeet niet dat in de Booleaanse algebra een punt voorang heeft op en plus waardoor het plaatsen van haakjes soms noodzakelijk word

Om de gelijkheid van het linker en rechter lid van de eerste dualiteitswet aan te tonen tekenen we voor elk lid een schakeling en stellen daarvan de waarheidstabel op

Praktisch komt het hier op neer dat onderstaande schakelingen dezelfde logische functie vervullen al zijn ze volledig anders van opbouw.



De gelijkheid van beide schakelingen kan aangetoond worden door het opstellen van de waarheidstabellen

B	*A*	$X\ \overline{A.B}$
0	*0*	***1***
0	*1*	***1***
1	*0*	***1***
1	*1*	***0***

B	*A*	$\overline{B}$	$\overline{A}$	$X\ .\overline{A}+\overline{B}$
0	*0*	*1*	*1*	***1***
0	*1*	*1*	*0*	***1***
1	*0*	*0*	*1*	***1***
1	*1*	*0*	*0*	***0***

Voorbeelden:

$$\overline{A.B.C.D} \Rightarrow \overline{A+B+C+D} \Rightarrow \overline{\overline{A+B+C+D}} \Rightarrow \overline{\overline{\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}}} \Rightarrow \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$$

$$\overline{(A.B).C} \Rightarrow \overline{(A+B)+C} \Rightarrow \overline{\overline{(A+B)+C}} \Rightarrow \overline{\overline{\overline{(A+B)}+\overline{C}}} \Rightarrow \overline{(A+B)}+\overline{C}$$

$$\overline{(A+B).(C+D)} \Rightarrow \overline{(A+B)+(C+D)} \Rightarrow \overline{\overline{(A+B)+(C+D)}} \Rightarrow \overline{\overline{\overline{(A+B)}+\overline{(C+D)}}} \Rightarrow \overline{A+B}+\overline{C+D}$$

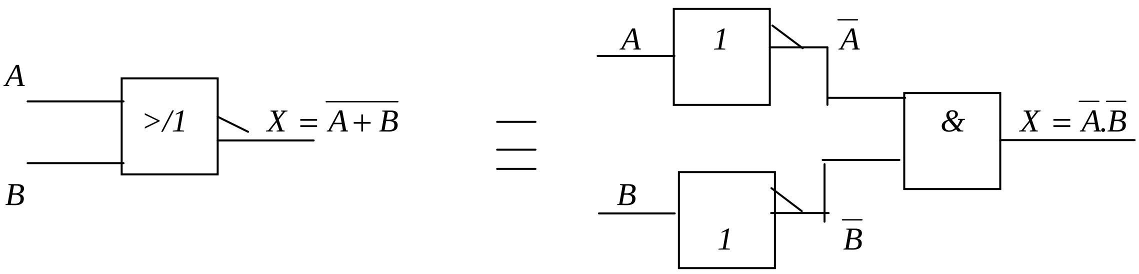
3.2.2. Van of naar en

Tweede dualiteitswet

$\boxed{\overline{A+B}=\overline{A}.\overline{B}}$

Dit punt is volledig analoog met 3.2.1

Met behulp van de Booleaanse algebra kunnen we nu een logische som omzetten naar een logisch produkt.
In de praktijk betekent dit dat beide onderstaande schakelingen dezelfde logische functie vervullen



De gelijkheid van beide schakelingen kan dus aangetoond worden met de waarheidstabel.

B	A	$X=\overline{A+B}$
0	0	**1**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**0**

B	A	$\overline{B}$	$\overline{A}$	$X=\overline{A}.\overline{B}$
0	0	1	1	**1**
0	1	1	0	**0**
1	0	0	1	**0**
1	1	0	0	**0**

Voorbeelden:

$$\overline{A+B+C+D}=\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}$$

$$\overline{A.B+C}=\overline{A.B}+\overline{C}$$

$$\overline{A.B+C.D}=\overline{A.B}.\overline{C.D}$$

$$A+B=\overline{\overline{A}.\overline{B}}$$

3.3.Toepassingen op de algebra van Boole en op de wetten van De Morgan

3.3.1. Bewijs dat:

$$(A+B).(\overline{A}+B)=B$$

$$\underbrace{A.\overline{A}}_{0}+A.B+\overline{A}.B+\underbrace{B.B}_{B}$$

$$A.B+\underbrace{\overline{A}.B+B}_{B}$$

$$\underbrace{A.B+B}_{B}=B$$

3.3.2. Bewijs dat:

$A.B+\overline{A}.C+B.C = A.B+\overline{A}.C$

(B.C proberen wegwerken door toevoeging van 1)

$$\left(1=A+\overline{A}\right)$$

$$A.B+\overline{A}.C+\underbrace{(A+\overline{A})}_{1}.B.C$$

$$\underline{A.B}+\underline{\underline{\overline{A}.C}}+\underline{A.B}.C+\underline{\underline{\overline{A}}}.B.\underline{\underline{C}}$$

$$A.B.\underbrace{(1+C)}_{1}+\overline{A}.C.\underbrace{(1+B)}_{1}$$

$A.B+\overline{A}.C$

3.3.3. Bewijs dat:

$(A+B).(\overline{A}+C) = A.C+\overline{A}.B$

$$\underbrace{A.\overline{A}}_{0}+A.C+\overline{A}.B+B.C$$

$A.C+\overline{A}.B+B.C$

(B.C wegwerken door toevoeging van 1) $\left(1=A+\overline{A}\right)$

$$A.C+\overline{A}.B+\underbrace{(A+\overline{A})}_{1}.B.C$$

$$A.C+\overline{A}.B+A.B.C+\overline{A}.B.C$$

$$A.C(1+B)+\overline{A}.B(1+C)$$

$\hookrightarrow 1 \qquad \hookrightarrow 1$

$A.C+\overline{A}.B$

3.3.4. Bewijs dat:

$(A+B).(A+C).(B+C)=A.B+A.C+B.C$

$(\underbrace{A.A}_{A}+A.C+A.B+B.C).(B+C)$

$(\underbrace{A+A.C}_{A}+A.B+B.C).(B+C)$

$(\underbrace{A+A.B}_{A}+B.C)(B+C)$

$(A+B.C).(B+C)$

$A.B+A.C+\underbrace{\underbrace{B.B.C}_{B.C}+\underbrace{B.B.C}_{B.C}}_{B.C}$

$A.B+A.C+B.C$

3.3.5. Bewijs dat:

$(A+B).(\overline{A}+C).(B+C)=(A+B).(\overline{A}+C)$

$(\underbrace{A.\overline{A}}_{0}+A.C+\overline{A}.B+B.C).(B+C)$

$(A.C+\overline{A}.B+B.C).(B+C)$

$A.B.C+\underbrace{A.C.C}_{A.C}+\underbrace{A.B.B}_{\overline{A}.B}+\overline{A}.B.C+\underbrace{\underbrace{B.B.C}_{B.C}+\underbrace{B.C.C}_{B.C}}_{B.C}$

$\underline{A.B.C}+A.C+\overline{A}.B+\underline{\overline{A}.B.C}+B.C$

$B.C(\underbrace{A+\overline{A}}_{1})+A.C+\overline{A}.B+B.C$

$\underline{B.C}+A.C+\overline{A}.B+\underline{B.C}$

$A.C+\overline{A}.B+B.C$ *(links)*

(haakjes rechts uitwerken)

$(A+B).(\overline{A}+C)$

$\underbrace{A.\overline{A}}_{0}+A.C+\overline{A}.B+B.C$

$A.C+\overline{A}.B+B.C$ *(rechts)

3.3.6. Pas de wetten van De Morgen toe zodanig dat er alleen somtermen over blijven

3.3.6.1.

$$X = (A.B + C.D).E$$
$$\rightarrow \overline{\left(\overline{A.B + C.D}\right) + \overline{E}} \quad \textit{(haakjes mogen wegvallen)}$$
$$= \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}} + \overline{\overline{\overline{C}} + \overline{\overline{D}}}} + \overline{E}}$$

3.3.6.2.

$$X = (A + B + C).D.E + \overline{F}$$
$$= \overline{\overline{A + B + C} + \overline{D} + \overline{E}} + \overline{F}$$

3.3.7. Pas de wetten van De Morgan toe zodanig dat er alleen procucttermen overblijven

3.3.7.1.

$$X = (A.B + C.D).E$$
$$= \overline{\overline{A.B}}.\overline{\overline{C.D}}.E$$

3.3.7.2.

$$X = (A + B + C).D.E + \overline{F}$$
$$= \overline{\overline{\overline{\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}}.D}.E}.F$$

3.3.8. Pas de wetten van De Morgan toe zodanig dat de inverteringstekens nog slechts de lengte hebben van 1 variabele.

3.3.8.1.

$$X = \overline{\overline{A + B.C} + D}$$
$$\rightarrow \overline{\overline{\overline{\overline{A + B.C}}.\overline{D}}}$$
$$= (A + B.C).\overline{D}$$

3.3.8.2.

$$X = \overline{\overline{\overline{\overline{A} + B} + C} + D}$$
$$\rightarrow \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A} + B} + C}}.\overline{D}}}$$
$$\rightarrow \left(\overline{\overline{A} + B} + C\right).\overline{D}$$

$$\rightarrow \left(\overline{\overline{\overline{\overline{A}}.\overline{B}}} + C \right).\overline{D}$$

$$= \left(A.\overline{B} + C \right).\overline{D}$$ *($A.\overline{B}$ geen haakjes nodig; punt heeft voorrang op plus)*